



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**DUFFINGOVA ROVNICE V MATEMATICKÉM
MODELOVÁNÍ KMITŮ NELINEÁRNÍCH OSCILÁTORŮ**

DUFFING EQUATION IN MATHEMATICAL MODELLING OF NON-LINEAR OSCILLATORS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Juliana Vozárová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Juliana Vozárová**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Duffingova rovnice v matematickém modelování kmitů nelineárních oscilátorů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Při matematickém modelování v mechanice se objevují obyčejné diferenciální rovnice různých typů. I když se většinou jedná o dosti složité nelineární rovnice, vhodnou aproximací nelinearit dostaneme jednodušší rovnice, které jsou dobře známé, nebo lze jejich vlastnosti uspokojivě analyticky vyšetřit. Jedním z představitelů takových "aproximativních" rovnic je rovnice Duffingova.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se základy teorie dynamických systémů (zejména autonomních systémů).
2. Interpretace Duffingovy rovnice v souvislosti s aproximací volných kmitů vhodných nelineárních oscilátorů.
3. Vyšetření otázek existence singulárních bodů (rovnovážných stavů) a jejich stability, analytický popis fázových portrétů a jejich interpretace.

Seznam doporučené literatury:

RACHŮNKOVÁ, I. a J. FIŠER. Dynamické systémy 1. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. ISBN 978-80-244-4338-6.

KALAS, J. a M. RÁB. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1130-0.

KOVACIC (ed.), I. a M. J. BRENNAN (ed.). The Duffing equation. Nonlinear oscillators and their behaviour. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, Ltd., 2011. ISBN 978-0-470-71549-9.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá skúmaním správania nelineárnych oscilátorov. V ich matematických modeloch sa často objavuje Duffingova rovnica. Cieľmi práce sú zoznámenie sa so základmi teórie diferenciálnych rovníc, interpretácia Duffingovej rovnice a jej analýza. Na naplnenie týchto cieľov práca využíva tzv. kvalitatívnu teóriu diferenciálnych rovníc. To znamená, že sa nehľadá presné riešenie rovnice, ale skúma sa jeho chovanie a vlastnosti. Niektoré z vlastností riešení je možné získať z fázových portrétov.

Abstract

The thesis deals with the behaviour of non-linear oscillators. Within their models there often appears the Duffing equation. The aims of this investigation include fundamentals of the theory of differential equations, interpretation of the Duffing equation and its analysis. To fulfill these aims, this investigation utilizes qualitative theory of the differential equations. It means that closed form solutions to the equations are not looked for but qualitative behaviour and properties of the solutions are studied. Some of the properties of solutions can be obtained from phase portraits.

Klíčové slová

Duffingova rovnica, singulárne body, stabilita, hamiltonián, fázový portrét

Keywords

Duffing equation, singular points, stability, hamiltonian, phase portrait

VOZÁROVÁ, J. *Duffingova rovnice v matematickém modelování kmitů nelineárních oscilátorů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 31 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Jiří Šremr, Ph.D.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Duffingova rovnice v matematickém modelování kmitů nelineárních oscilátorů* vypracovala samostatne pod vedením doc. Ing. Jiřího Šremra, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname použitých zdrojov.

Juliana Vozárová

Ďakujem svojmu vedúcemu bakalárskej práce doc. Ing. Jiřímu Šremrovi, Ph.D. za jeho cenné rady, ochotu a ústretový prístup pri vedení mojej práce.

Juliana Vozárová

Obsah

Úvod	12
1 Základné pojmy	13
2 Dvojdimenzionálne sústavy	15
3 Hamiltonove systémy	16
4 Analýza Duffingovej rovnice	18
4.1 Rovnica (4.1) s $\beta > 0$	18
4.1.1 Prípád $\alpha < 0$	20
4.1.2 Prípád $\alpha > 0$	23
4.1.3 Prípád $\alpha = 0$	24
4.2 Rovnica (4.1) s $\beta < 0$	25
4.2.1 Prípád $\alpha > 0$	25
4.2.2 Prípád $\alpha < 0$	27
4.2.3 Prípád $\alpha = 0$	28
Záver	30
Zoznam použitých zdrojov	31

Úvod

Matematické modelovanie je časť matematiky, ktorá napodobňuje určitý výsledok reality tým, že sa pomocou základných zákonitostí z prírodných vied snaží popísať a formulovať dané javy matematickými rovnicami. Pri matematickom modelovaní v mechanike sa často objavujú diferenciálne rovnice rôznych typov. Väčšinou ide o pomerne zložité nelineárne rovnice, ktoré je však možné vhodnou aproximáciou nelinearít previesť na jednoduchšie rovnice. Jednou z takýchto rovníc je práve rovnica Duffingova. Ide o diferenciálnu rovnicu 2. rádu s kubickou nelinearitou, ktorá popisuje chaotické správanie niektorých dynamických systémov.

V práci si kladieme nasledovné ciele. Prvým je zoznámiť sa so základmi problematiky sústav diferenciálnych rovníc, a to predovšetkým autonómnych. Druhým cieľom je odvodenie a interpretácia Duffingovej rovnice v súvislosti s aproximáciou kmitov nelineárneho oscilátoru. Tretím cieľom je analýza singulárnych bodov a ich stability Duffingovej rovnice, vykreslenie fázových portrétov a ich interpretácia.

Táto práca je rozdelená na teoretickú a praktickú časť. Teoretickej časti sa venujeme v prvých troch kapitolách, kde si najprv uvedieme niekoľko dôležitých základných pojmov z problematiky sústav diferenciálnych rovníc. Budeme sa venovať existencii a jednoznačnosti riešenia a definujeme si singulárne body. Ich typy si upresníme pre dvojdimenzionálne systavy. Špeciálnym typom dvojdimenzionálnych sústav sú Hamiltonove systémy, ktorým je venovaná tretia kapitola. Tie hrajú dôležitú rolu pri vykresľovaní fázových portrétov.

Praktickej časti tejto práce je venovaná štvrtá kapitola, kde analyzujeme Duffingovu rovnicu. Najprv si ukážeme odvodenie tejto rovnice z konkrétneho matematického modelu. Pomocou 2. Newtonovho zákona a následnou aproximáciou nelineárneho člena Taylorovým polynómom získame tvar odpovedajúci Duffingovej rovnici. Rozoberieme si všetky možné prípady, ktoré pre túto rovnicu môžu nastať a pre každý z nich určíme singulárne body, rozhodneme o ich type a stabilite. Následne vykreslíme a interpretujeme fázové portréty.

1 Základné pojmy

Definícia 1.1. Nech $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená množina a $f_1, \dots, f_n : G \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie. Sústavu

$$\begin{aligned}y'_1 &= f_1(y_1, \dots, y_n), \\y'_2 &= f_2(y_1, \dots, y_n), \\&\vdots \\y'_n &= f_n(y_1, \dots, y_n)\end{aligned}\tag{1.1}$$

nazývame autonómnou sústavou n obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu.

Poznámka 1.2. Sústavu (1.1) ekvivalentným spôsobom zapíšeme pomocou vektorových funkcií v tvare

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}).\tag{1.2}$$

Definícia 1.3. *Riešením sústavy (1.2) na intervale $I \subseteq \mathbb{R}$ nazývame takú vektorovú funkciu $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, ktorá je spojitá a diferencovateľná na intervale I a platí*

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \quad \forall t \in I.$$

Definícia 1.4. Nech $\mathbf{y}^0 \in G$. Podmienka

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0\tag{1.3}$$

sa nazýva *počiatočná (Cauchyho) podmienka*. Úloha nájsť riešenie sústavy (1.2) splňujúce podmienku (1.3) sa nazýva *počiatočná (Cauchyho) úloha*. Riešenie počiatočnej úlohy (1.2),(1.3) budeme značiť $\varphi(\cdot, \mathbf{y}^0)$.

Veta 1.5 (Peanova). *Nech funkcia \mathbf{f} definovaná v $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je spojitá v okolí bodu $\mathbf{y}_0 \in G$. Potom existuje aspoň jedno riešenie počiatočnej úlohy (1.2),(1.3), ktoré je definované na nejakom intervale obsahujúcom bod 0.*

Dôkaz. Dôkaz spočíva vo vyrobení vhodnej postupnosti funkcií a využíva vetu Arzéla-Ascoli. Podrobne je dôkaz uvedený napríklad v [1] alebo [2]. \square

Veta 1.6 (Pickardova). *Nech funkcia \mathbf{f} definovaná v $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je spojitá v okolí bodu $\mathbf{y}_0 \in G$ a navyše má spojité parciálne derivácie 1. rádu. Potom existuje práve jedno riešenie počiatočnej úlohy (1.2),(1.3), ktoré je definované na nejakom intervale, ktorý obsahuje bod 0.*

Dôkaz. Dôkaz vety je založený na Banachovej vete o pevnom bode kontraktívneho zobrazenia (viď napríklad [1], [2]). \square

Poznámka 1.7. Pre autonómne sústavy stačí uvažovať počiatočnú podmienku v tvare (1.3), tj. predpísať hodnotu riešenia v bode 0, pretože pre ľubovoľné $t_0 \in \mathbb{R}$ je funkcia $\mathbf{y}(t) = \varphi(t - t_0, \mathbf{y}^0)$ riešením počiatočnej úlohy $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$.

Definícia 1.8. *Grafom riešenia $\varphi(\cdot, \mathbf{y}^0)$ sústavy (1.2) na intervale $I_{\mathbf{y}^0}$ nazývame množinu bodov $(t, \varphi(t, \mathbf{y}^0))$, kde $t \in I_{\mathbf{y}^0}$.*

Definícia 1.9. *Orbitou riešenia $\varphi(\cdot, \mathbf{y}^0)$ sústavy (1.2) na intervale $I_{\mathbf{y}^0}$ nazývame množinu bodov $\varphi(t, \mathbf{y}^0)$, kde $t \in I_{\mathbf{y}^0}$.*

Poznámka 1.10. Orbitu riešenia $\varphi(\cdot, \mathbf{y}^0)$ sústavy (1.2) dostaneme projekciou grafu tohto riešenia do priestoru \mathbb{R}^n .

Niektoré typy orbít:

- *cyklus* - odpovedá periodickému riešeniu a má tvar uzavretej krivky,
- *homoklinická orbita* - odpovedá riešeniu, ktoré konverguje pre $t \rightarrow \infty$ a $t \rightarrow -\infty$ k tomu istému bodu,
- *heteroklinická orbita* - odpovedá riešeniu konvergujúcemu pre $t \rightarrow \infty$ a $t \rightarrow -\infty$ k rôznym bodom.

Poznámka 1.11. *Fázovým portrétom* sústavy (1.2) rozumieme množinu orbít všetkých riešení. Orientácia orbít (smer šípiek na orbitách) vyznačuje pohyb bodu $\varphi(t, \mathbf{y}^0)$ na orbite s rastúcim t .

Definícia 1.12. *Singulárnym bodom* sústavy (1.2) nazývame bod $\bar{\mathbf{y}} \in G$, splňujúci rovnosť $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$.

Poznámka 1.13. Je zrejmé, že $\bar{\mathbf{y}} \in G$ je singulárnym bodom sústavy (1.2) práve vtedy, keď je konštantná funkcia $\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{y}}$ riešením sústavy (1.2) na \mathbb{R} .

Definícia 1.14. Singulárny bod $\bar{\mathbf{y}} \in G$ sa nazýva *stabilný*, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{y}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^0\| < \delta$$

je riešenie $\varphi(\cdot, \mathbf{y}^0)$ definované aspoň na $\langle 0, \infty)$ a platí

$$\|\varphi(t, \mathbf{y}^0) - \bar{\mathbf{y}}\| < \varepsilon \quad \text{pre } \forall t \geq 0.$$

V opačnom prípade sa singulárny bod nazýva *nestabilný*.

Definícia 1.15. Singulárny bod $\bar{\mathbf{y}}$ sa nazýva *asymptoticky stabilný*, ak je stabilný a navyše platí

$$\exists \delta > 0 \forall \mathbf{y}^0 \in G : \|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}^0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \mathbf{y}^0) - \bar{\mathbf{y}}\| = 0.$$

2 Dvojdimenziálne sústavy

Ak položíme v definíciách a vetách predošlej kapitoly dimenziu $n = 2$, získame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2), \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Túto sústavu nazývame dvojdimenziálnou (planárnou) sústavou diferenciálnych rovníc. Ekvivalentne ju zapíšeme vektorovo v tvare (1.2), kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$. Spolu s (1.2) uvažujeme počiatočnú podmienku (1.3). Predpokladajme v celej kapitole, že funkcie f_1, f_2 sú spojité a majú spojité parciálne derivácie 1. rádu v $G \subseteq \mathbb{R}$. Podľa vety 1.6 má potom každá počiatočná úloha (1.2),(1.3) jediné riešenie. Toto riešenie je definované na nejakom maximálnom intervale svojej existencie a značíme ho $\varphi(\cdot, \mathbf{y}^0)$.

Definícia 2.1. Maticu

$$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

nazývame *Jacobiho maticou* vektorovej funkcie $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ v bode $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$.

Poznámka 2.2. Vlastné čísla Jacobiho matice (2.2) sú riešením charakteristickej rovnice

$$\det(D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}) - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

kde \mathbf{I} značí jednotkovú maticu 2. rádu.

Definícia 2.3. Singulárny bod $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ sústavy (2.1) nazývame *hyperbolický*, ak má Jacobiho matica (2.2) obe vlastné čísla s nenulovými reálnymi zložkami. Ak má Jacobiho matica (2.2) aspoň jedno vlastné číslo s nulovou reálnou zložkou, potom singulárny bod $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ sústavy (2.1) nazveme *nehyperbolický*.

Veta 2.4. [4, Věta 7.11] *Nech $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ je hyperbolický singulárny bod sústavy (2.1). Ak obe vlastné čísla Jacobiho matice (2.2) majú zápornú reálnu časť, potom singulárny bod $\bar{\mathbf{y}}$ je asymptoticky stabilný.*

Veta 2.5. [4, Věta 7.12] *Nech $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ je hyperbolický singulárny bod sústavy (2.1). Ak aspoň jedno vlastné číslo Jacobiho matice (2.2) má kladnú reálnu časť, potom singulárny bod $\bar{\mathbf{y}}$ je nestabilný.*

Existuje rozsiahla klasifikácia singulárnych bodov. Pre túto prácu stačí zaviesť pojmy singulárneho bodu typu sedlo a stred.

Definícia 2.6. Singulárny bod $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ sústavy (2.1) sa nazýva *sedlo*, ak existujú body $\mathbf{y}^1 \neq \bar{\mathbf{y}}$ a $\mathbf{y}^2 \neq \bar{\mathbf{y}}$ také, že platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{y}^1) = \bar{\mathbf{y}} \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{y}^2) = \bar{\mathbf{y}}.$$

Poznámka 2.7. Singulárny bod typu sedlo je vzhľadom k definícii 1.14 vždy nestabilný.

Definícia 2.8. Singulárny bod $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ sústavy (2.1) nazývame *stredom*, ak existuje okolie o bodu $\bar{\mathbf{y}}$, také, že pre každé $\mathbf{y}^1 \in o$, $\mathbf{y}^1 \neq \bar{\mathbf{y}}$ je orbita prechádzajúca bodom \mathbf{y}^1 cyklom, tj. riešenie $\varphi(\cdot, \mathbf{y}^1)$ sústavy (2.1) je definované na \mathbb{R} a je periodické.

3 Hamiltonove systémy

Definícia 3.1. Nech $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otvorená množina a nech funkcia H má spojité parciálne derivácie až do rádu 2. Dvojdimenzionálna sústava tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{\partial H}{\partial y_2}(y_1, y_2), \\ y_2' &= -\frac{\partial H}{\partial y_1}(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

sa nazýva *Hamiltonov systém* a funkciu H nazývame *hamiltonián*. Spolu so sústavou (3.1) budeme uvažovať opäť počiatočnú podmienku

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0. \quad (3.2)$$

Poznámka 3.2. Hamiltonov systém (3.1) je špeciálny prípad sústavy (2.1), kde

$$f_1(y_1, y_2) = \frac{\partial H}{\partial y_2}(y_1, y_2), \quad f_2(y_1, y_2) = -\frac{\partial H}{\partial y_1}(y_1, y_2).$$

Poznámka 3.3. Hamiltonián má vo fyzikálnych modeloch význam totálnej energie.

Veta 3.4 (Konzervácia energie). Nech $\mathbf{y}^0 \in G$ a $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \mathbf{y}^0)$ je riešenie počiatočnej úlohy (3.1), (3.2) na maximálnom intervale $I_{\mathbf{y}^0} \subseteq \mathbb{R}$. Potom platí

$$H(\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{y}^0)) = H(\mathbf{y}^0) \quad \forall t \in I_{\mathbf{y}^0}.$$

Poznámka 3.5. Dôkaz vety 3.4 je uvedený napríklad v [4].

Poznámka 3.6. Veta 3.4 hovorí o tom, že hodnota hamiltoniánu zostáva konštantná pozdĺž orbity ľubovoľného riešenia Hamiltonovho systému. Hovoríme, že systém (3.1) *konzervuje energiu*.

Definícia 3.7. Nech $c \in \mathbb{R}$. *Hladina* \mathcal{H}_c funkcie H je množina bodov $(y_1, y_2) \in G$, ktorá splňuje

$$H(y_1, y_2) = c.$$

Dôsledok 3.8. *Hladiny hamiltoniánu H sa skladajú z orbít sústavy (3.1).*

Poznámka 3.9. Z dôsledku 3.8 okamžite plynie, že hladina hamiltoniánu obsahujúca singulárny bod (\bar{y}_1, \bar{y}_2) sústavy (3.1) je množina bodov $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ splňujúcich

$$H(y_1, y_2) = H(\bar{y}_1, \bar{y}_2).$$

Navyše každá orbita sústavy (3.1) je obsiahnutá v nejakej hladine hamiltoniánu H .

Pomocou metódy izoklín môžeme určiť orientáciu orbít fázového portréту sústavy (3.1) a metódou linearizácie typy singulárnych bodov (viď napríklad [4, kapitola 7]). Jacobiho matica sústavy (3.1) v bode (y_1, y_2) je tvaru

$$\mathbf{M}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial^2 H}{\partial y_2^2}(y_1, y_2) \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial y_1^2}(y_1, y_2) & -\frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial y_1}(y_1, y_2) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Pomocou determinantu Jacobiho matice (3.3) je možné rozhodnúť o type singulárneho bodu $\bar{\mathbf{y}}$ sústavy (3.1).

Veta 3.10. [4, Věta 8.7] Nech $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in G$ je singulárny bod sústavy (3.1). Potom platí,

ak $\det(\mathbf{M}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)) < 0$, $\bar{\mathbf{y}}$ je sedlo systému (3.1),
 ak $\det(\mathbf{M}(\bar{y}_1, \bar{y}_2)) > 0$, $\bar{\mathbf{y}}$ je stred systému (3.1).

Diferenciálne rovnice druhého rádu tvaru $y'' + f(y) = 0$ je možné pomocou substitúcie $y_1 = y$, $y_2 = y'$ previesť na tzv. *konzervatívny systém*, ktorý je špeciálnym typom Hamiltonovho systému. Konzervatívny systém je sústava tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -f(y_1), \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia. Hamiltonián sústavy (3.4) je potom tvaru

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + \int_0^{y_1} f(u) du \tag{3.5}$$

pre $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}$.

Poznámka 3.11. Z rovníc sústavy (3.4) vyplýva, že všetky singulárne body majú tvar $(\bar{y}_1, 0)$, takže ležia na osi y_1 .

Jacobiho matica sústavy (3.4) je

$$\mathbf{M}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(y_1) & 0 \end{pmatrix}$$

a jej determinant je

$$\det(\mathbf{M}(y_1, y_2)) = f'(y_1).$$

Pre konzervatívny systém má veta 3.10 nasledovné znenie.

Veta 3.12. [4, Věta 8.9] Nech $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, 0) \in G$ je singulárny bod sústavy (3.4). Potom platí,

ak $f'(\bar{y}_1) < 0$, $\bar{\mathbf{y}}$ je sedlo systému (3.4),
 ak $f'(\bar{y}_1) > 0$, $\bar{\mathbf{y}}$ je stred systému (3.4).

Poznámka 3.13. Fázovým portrétom diferenciálnej rovnice $y'' + f(y) = 0$ budeme rozumieť fázový portrét odpovedajúcej dvojdimenzionálnej sústavy (3.4).

4 Analýza Duffingovej rovnice

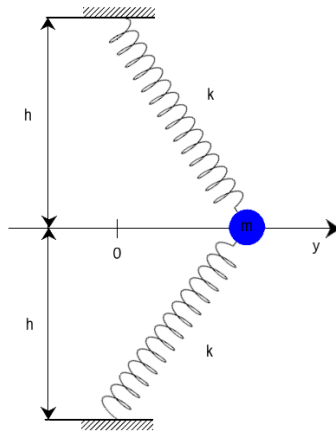
Duffingovou diferenciálnou rovnicou sa obvykle rozumie diferenciálna rovnica 2. rádu s kubickou nelinearitou tvaru

$$y'' + \alpha y + \beta y^3 = 0, \quad (4.1)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Rovnica (4.1) však môže obsahovať taktiež členy s prvou deriváciou, kvadratickou nelinearitou a nenulovou funkciou na pravej strane. sú podrobne študované napríklad v prehľadovej monológii [3]. Takéto rovnice Cieľom práce je podrobná analýza rovnice (4.1). V prípade $\beta < 0$ nájdeme najmä singulárne body, rozhodneme o ich stabilite a vykreslíme globálny fázový portrét. V prípade $\beta > 0$ ukážeme, kde sa môže táto rovnica objaviť v súvislosti s aproximáciou nelinearit v pohybovej rovnici matematického kyvadla a vykreslíme fázové portréty pre rôzne hodnoty α .

4.1 Rovnica (4.1) s $\beta > 0$

Rovnica (4.1) sa objaví napríklad pri aproximácii nelinearity v pohybovej rovnici oscilátoru, ktorý je znázornený na obr. 1. Majme tuhé teleso o hmotnosti m a dve lineárne pružiny dĺžky l_0 a tuhosti k . Zamedzme telesu pohyb v zvislom smere a uchyťme pružiny vo vzdialenostiach h podľa obr. 1. Akékoľvek trenie a odporové sily zanedbajme, nedochádza teda k disipácii energie.



Obr. 1: Model oscilátoru

Na odvodenie pohybovej rovnice využijeme 2. Newtonov zákon

$$m \vec{a} = \vec{F},$$

kde \vec{a} je zrýchlenie a \vec{F} je výslednica síl pôsobiacich na teleso. Keďže sme zamedzili pohyb telesa v zvislom smere, budeme uvažovať len pohyb v smere osi y . Ďalej platí, že y'' odpovedá zrýchleniu. Z toho dostávame rovnicu

$$my'' = F_y,$$

kde F_y je súradnica zložky pružnej sily v smere y , ktorú vyvolávajú pružiny. Tá je daná rovnicou

$$F_y = -2k \left(\sqrt{h^2 + y^2} - l_0 \right) \sin \varphi,$$

kde φ je uhol, ktorý zvierajú pružina so stavom v polohe $y = 0$ a platí

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{h^2 + y^2}}.$$

Dosadením a úpravou získame pohybovú rovnicu

$$y'' + \frac{2k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + y^2}} \right) y = 0. \quad (4.2)$$

Teraz aproximujeme nelineárny člen v rovnici (4.2) pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa so stredom v $\bar{y} = 0$. Položme

$$g(y) = \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + y^2}} \right) y.$$

Taylorov polynom 3. stupňa so stredom v bode 0 je tvaru

$$T_3(y) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}y + \frac{g''(0)}{2!}y^2 + \frac{g'''(0)}{3!}y^3, \quad (4.3)$$

kde

$$\begin{aligned} g(\bar{y}) &= \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + \bar{y}^2}} \right) \bar{y}, & g(0) &= 0, \\ g'(\bar{y}) &= 1 - \frac{l_0 h^2}{(h^2 + \bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, & g'(0) &= -\frac{l_0 - h}{h}, \\ g''(\bar{y}) &= \frac{3l_0 h^2 \bar{y}}{(h^2 + \bar{y}^2)^{\frac{5}{2}}}, & g''(0) &= 0, \\ g'''(\bar{y}) &= \frac{3l_0(h^2 - 4\bar{y}^2)h}{(h^2 + \bar{y}^2)^{\frac{7}{2}}}, & g'''(0) &= \frac{3l_0}{h^3}. \end{aligned}$$

Dosadením týchto výrazov do (4.3) získame aproximáciu

$$\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + y^2}} \right) y \approx -\frac{l_0 - h}{h}y + \frac{l_0}{2h^3}y^3$$

a nahradením odpovedajúceho člena v rovnici (4.2) získame diferenciálnu rovnicu

$$y'' - \frac{2k(l_0 - h)}{mh}y + \frac{kl_0}{mh^3}y^3 = 0. \quad (4.4)$$

Rovnica (4.4) je špeciálnym prípadom Duffingovej rovnice (4.1), v ktorej

$$\alpha = -\frac{2k(l_0 - h)}{mh}, \quad \beta = \frac{kl_0}{mh^3} > 0.$$

Všimnime si, že koeficient α mení znamienko v závislosti na hodnotách parametrov l_0, h .

Analýzu rovnice (4.1) s $\beta > 0$ teda rozdelíme na prípady $\alpha < 0$, $\alpha > 0$ a $\alpha = 0$.

4.1.1 Prípád $\alpha < 0$

Tento prípad odpovedá aproximácii pohybovej rovnice (4.2) oscilátoru znázorneného na obr. 1, v ktorom je $h < l_0$. Pôjde teda o stlačenie pružín na dĺžku h , ak je teleso v pozícii $y = 0$.

Substitúciou $y_1 = y$, $y_2 = y'$ prevedieme rovnicu (4.1) na konzervatívny systém

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2, \\y_2' &= -\alpha y_1 - \beta y_1^3.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Vyriešme sústavu algebraických rovníc

$$\begin{aligned}y_2 &= 0, \\-\alpha y_1 - \beta y_1^3 &= 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Dostaneme tak tri singulárne body sústavy (4.5). Bod $B_1 = (0, 0)$ a dvojicu bodov $B_{2,3} = \left(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0\right)$.

Podľa vety 3.12 určíme typy singulárnych bodov. Veta využíva hodnotu derivácie funkcie f v (3.4), ktorá v tomto prípade je daná vzťahom

$$f(y_1) = \alpha y_1 + \beta y_1^3,\tag{4.7}$$

a jej derivácia je

$$f'(y_1) = \alpha + 3\beta y_1^2.\tag{4.8}$$

Pre bod $B_1 = (0, 0)$ je

$$f'(0) = \alpha < 0,$$

takže sa jedná o sedlo. Navyše vzhľadom ku poznámke 2.7 je singulárny bod B_1 nestabilný.

Pre body $B_{2,3} = \left(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0\right)$ platí

$$f'\left(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\right) = \alpha + 3\beta\left(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = -2\alpha > 0,$$

preto ide o stredy. O ich stabilite rozhodneme neskôr z fázového portréту.

Pre vykreslenie fázového portrétu sústavy (4.5) využijeme jej hamiltonián. Dosadením (4.7) do (3.5) dostaneme hamiltonián sústavy (4.5) v tvare

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{4}y_1^4 \quad \text{pre } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.\tag{4.9}$$

Poznámka 4.1. Z tvaru hamiltoniánu je zrejmé, že jeho hladiny budú symetrické ako podľa osi y_1 , tak aj podľa osi y_2 .

Najprv si určíme hladiny hamiltoniánu (4.9) obsahujúcu singulárne body $B_1 = (0, 0)$ a $B_{2,3} = \left(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0\right)$.

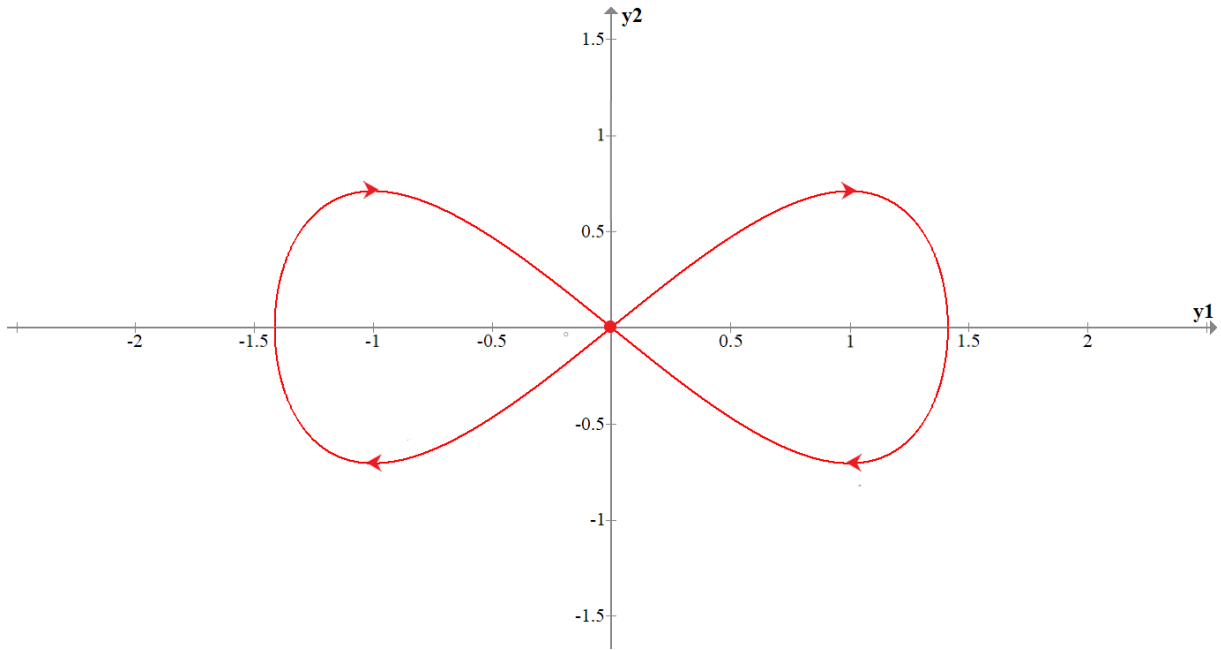
Pre bod $B_1 = (0, 0)$ platí $H(B_1) = H(0, 0) = 0$, takže vzhľadom k poznámke 3.9 rovnica hladiny obsahujúcej tento bod je

$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{4}y_1^4 = 0,$$

ktorú je možné písať v tvare

$$y_2 = \pm \sqrt{-\alpha y_1^2 - \frac{\beta}{2}y_1^4}, \quad y_1 \in \left\langle -\sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}} \right\rangle.$$

Orbity odpovedajúce tejto hladine hamiltoniánu sú znázornené na obr. 2 a vo fázovom portréte na obr. 4 červenou farbou.

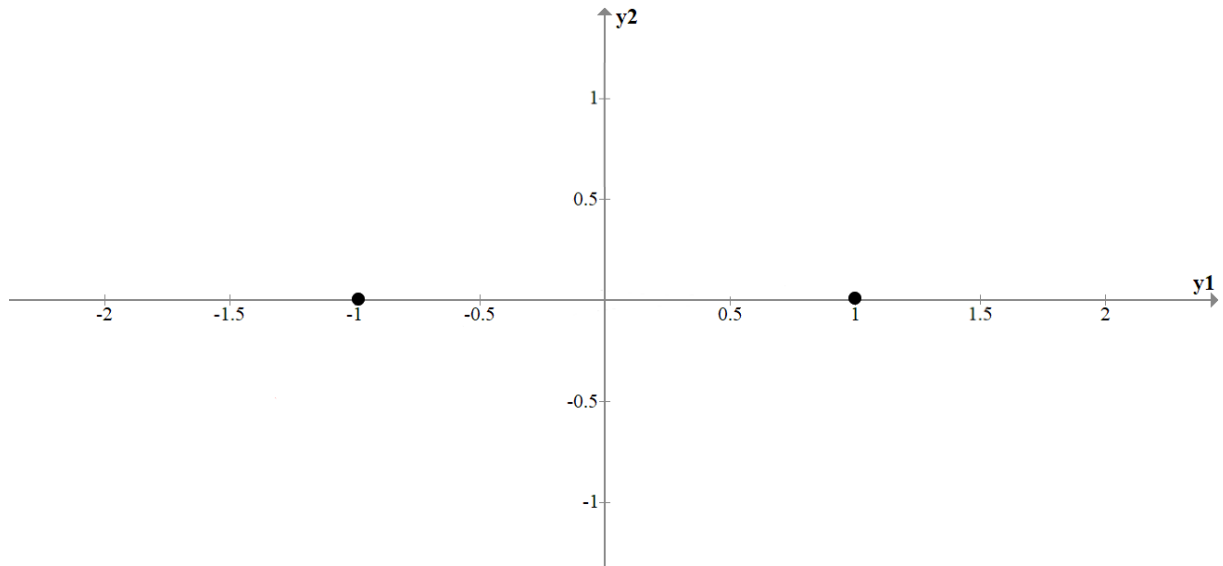


Obr. 2: Orbity odpovedajúce hladine $\mathcal{H}_{H(B_1)}$

V bodoch $B_{2,3}$ je hodnota hamiltoniánu $H(B_{2,3}) = H\left(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0\right) = \frac{\alpha^2}{4\beta}$, a preto rovnica hladiny je

$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{4}y_1^4 = \frac{\alpha^2}{4\beta}.$$

Tejto rovnici vyhovujú iba singulárne body $B_{2,3} = \left(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0\right)$. Orbity sú preto len body B_2 a B_3 (viď obr. 3 a 4).

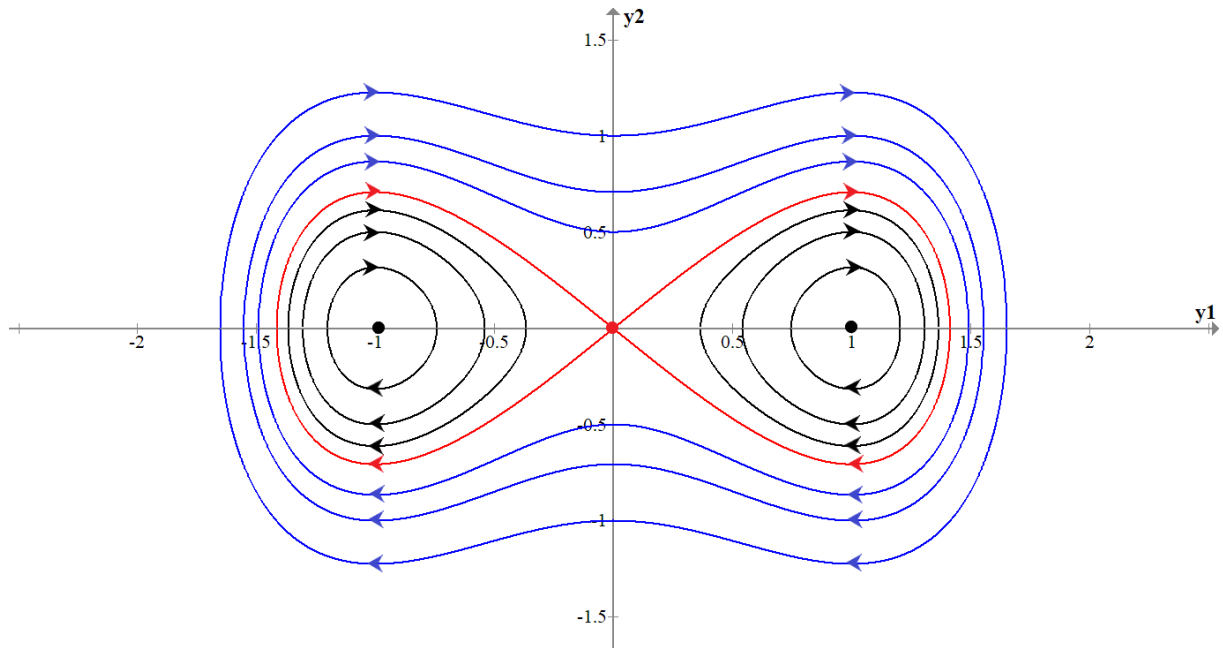


Obr. 3: Orbity odpovedajúce hladine $\mathcal{H}_{H(B_{2,3})}$

Ďalej vyriešime rovnice hladín, ktoré neobsahujú singulárne body. Vzhľadom k (4.9) hladiny hamiltoniánu pre prípustné hodnoty c sú dané rovnicou

$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{4}y_1^4 = c. \quad (4.10)$$

Prípady $c = 0$ a $c = \frac{\alpha^2}{4\beta}$ sme už prebrali. Pre $c > 0$ (resp. $\frac{\alpha^2}{4\beta} < c < 0$) má rovnica (4.10) v reálnom obore riešenie a odpovedajúce orbity sústavy (4.5) sú v obr. 4 znázornené modrou (resp. čiernou) farbou. Pre $c < \frac{\alpha^2}{4\beta}$ nemá rovnica (4.10) v reálnom obore riešenie, tj. príslušné hladiny hamiltoniánu sú prázdne množiny.



Obr. 4: Fázový portrét rovnice (4.1) s $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

Vráťme sa ku stabilite singulárnych bodov B_2 a B_3 . Z tvaru orbít vo fázovom portréte a z definície 1.14 odvodíme, že tieto singulárne body sú stabilné.

Z fázového portréту môžeme vidieť, že rovnica (4.1) s $\alpha < 0$, $\beta > 0$ má tri konštantné riešenia, ktoré v obr. 4 odpovedajú singulárnym bodom. Čiernymi bodkami sú znázornené konštantné stabilné riešenia a červenou bodkou konštantné riešenie nestabilné. Cyklom odpovedajú nekonštantné riešenia, ktoré sú periodické. V obr. 4 sú znázornené modrou farbou orbity odpovedajúce periodickým riešeniam so striedajúcim znamienkom a čiernou farbou orbity odpovedajúce periodickým riešeniam, ktoré nestrádzajú znamienko. Červenou farbou sú znázornené homoklinické orbity, ktoré odpovedajú riešeniam konvergujúcim pre $t \rightarrow \infty$ a $t \rightarrow -\infty$ k tomu istému bodu. Ďalšou vlastnosťou rovnice (4.1) je, že každé jej riešenie je ohraničené.

4.1.2 Prípad $\alpha > 0$

Tento prípad odpovedá aproximácii pohybovej rovnice (4.2) oscilátoru znázorneného na obr. 1, v ktorom je $h > l_0$.

Rovnicu (4.1) je možné ako v predošlom prípade previesť na konzervatívny systém (4.5). Vyriešením sústavy algebraických rovníc (4.6) získame singulárne body. Sústave vyhovuje jediný bod $B_1 = (0, 0)$. Na určenie typu tohto singulárneho bodu využijeme vetu 3.12, kde opäť potrebujeme poznať hodnotu derivácie funkcie f v (3.4), pre ktorú sme už odvodili vzťah (4.8).

Dosadením bodu $B_1 = (0, 0)$ do (4.8) je

$$f'(0) = \alpha > 0,$$

preto ide o stred, o ktorého stabilite rozhodneme neskôr.

Pre vykreslenie fázového portrétu si určíme podobne ako v predošlej kapitole hamiltonián systému (4.5), ktorý je tvaru

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{4}y_1^4 \quad \text{pre } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.11)$$

Hladina hamiltoniánu obsahujúca singulárny bod $B_1 = (0, 0)$ je \mathcal{H}_0 , pretože $H(0, 0) = 0$. Z poznámky 3.9 vyplýva, že rovnica hladiny obsahujúca tento bod je

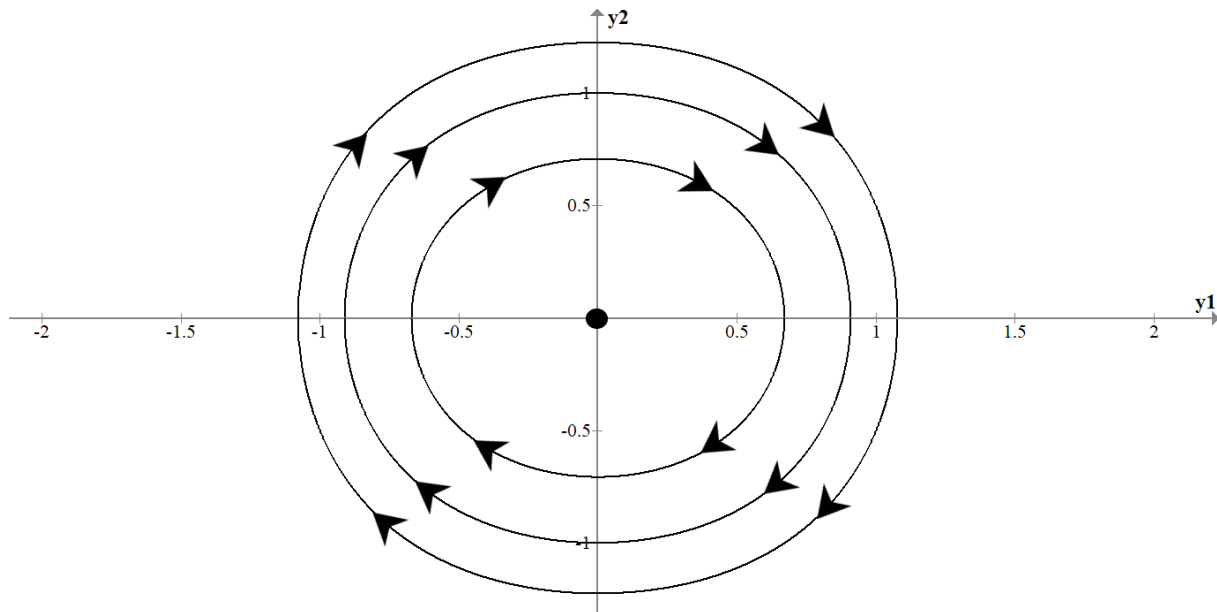
$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{4}y_1^4 = 0.$$

Tejto rovnici vyhovuje v reálnom obore jediný bod, a to singulárny bod $B_1 = (0, 0)$. Orbitou je preto len tento bod (viď obr. 5).

Ďalej vyriešime rovnice hladín neobsahujúcich singulárny bod. Vzhľadom k (4.11) hladiny hamiltoniánu pre prípustné hodnoty c sú dané rovnicou

$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{4}y_1^4 = c. \quad (4.12)$$

Pre $c > 0$ má rovnica (4.12) v reálnom obore riešenie a odpovedajúce orbity sústavy (4.5) sú zakreslené v obr. 5. Pre $c < 0$ nemá rovnica (4.12) v reálnom obore riešenie.



Obr. 5: Fázový portrét rovnice (4.1) s $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$.

Z fázového portréту na obr. 5 vidíme, že singulárny bod $B_1 = (0, 0)$ je naozaj stredom. Navyše z tvaru orbít a z definície 1.14 vyplýva, že tento singulárny bod je stabilný. Ten odpovedá stabilnému konštantnému riešeniu rovnice (4.1) s $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Ostatné riešenia sú nekonštantné periodické so striedajúcimi znamienkami. Ďalej môžeme vidieť, že každé riešenie rovnice (4.1) je ohraňované.

4.1.3 Prípád $\alpha = 0$

Tento prípad dostaneme aproximáciou pohybovej rovnice (4.2) oscilátoru znázorneného na obr. 1, kde je $h = l_0$. Rovnica (4.1) je tvaru

$$y'' + \beta y^3 = 0. \quad (4.13)$$

Singulárne body nájdeme prevedením rovnice (4.13) na konzervatívny systém

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -\beta y_1^3 \end{aligned} \quad (4.14)$$

a vyriešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} y_2 &= 0, \\ -\beta y_1^3 &= 0. \end{aligned}$$

Táto sústava má jedný singulárny bod, a to bod $B_1 = (0, 0)$. Sústava (4.14) je špeciálnym prípadom konzervatívneho systému (3.4), v ktorom $f(y_1) = \beta y_1^3$. Odtiaľ $f'(y_1) = 3\beta y_1^2$ a dosadením singulárneho bodu $B_1 = (0, 0)$ dostaneme $f'(0) = 0$. Na určenie typu tohto singulárneho bodu teda nemôžeme využiť vetu 3.12. O takomto prípade veta nehovorí. Avšak ako uvidíme z fázového portrétu, bude sa jednať o stabilný stred.

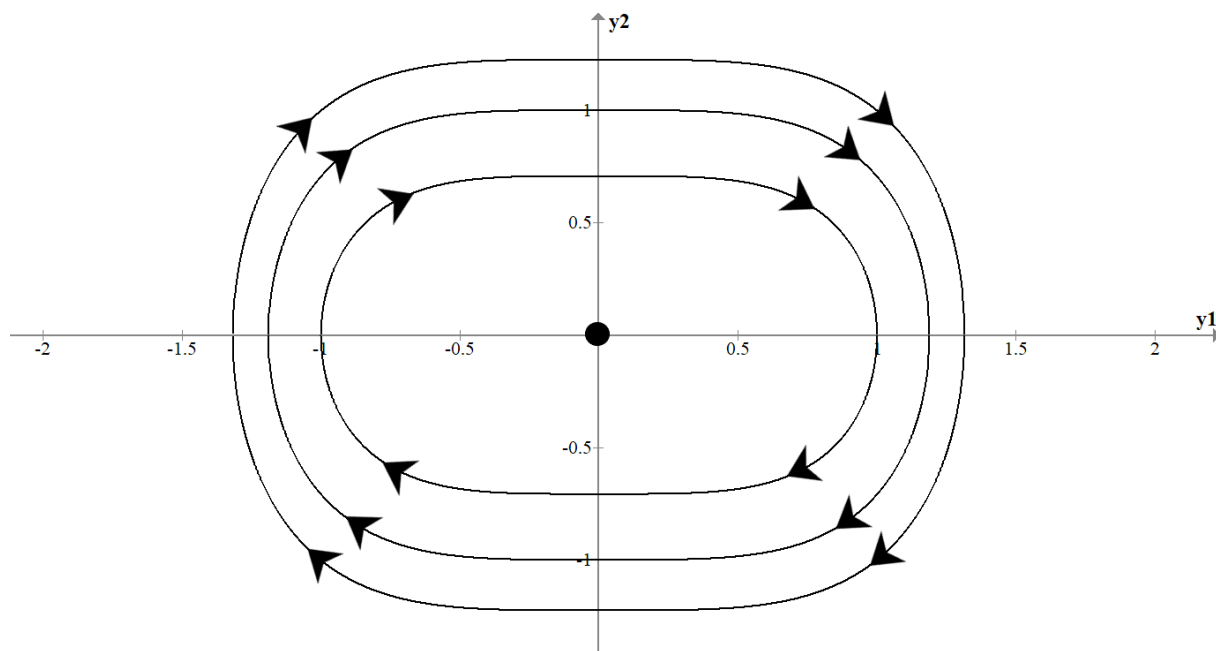
Podobne ako v predošlých kapitolách vzhľadom ku poznámke 3.9 nájdeme rovnice hladín hamiltoniánu sústavy (4.14), ktorý je tvaru

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + \frac{\beta}{4} y_1^4 \quad \text{pre } (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Rovnica hladín \mathcal{H}_c je teda

$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{\beta}{4}y_1^4 = c.$$

Riešenie tejto rovnice v reálnom obore existuje len pre $c \in \langle 0, \infty \rangle$, pričom pre $c = 0$ je hladina len singulárny bod $B_1 = (0, 0)$. Fázový portrét sústavy (4.14) je vykreslený v obr. 6.



Obr. 6: Fázový portrét rovnice (4.1) s $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Z fázového portréту zobrazeného na obr. 6 vidíme, že singulárny bod $B_1 = (0, 0)$ je podobne ako v predošlom prípade stredom, navyše stabilným. Ten odpovedá stabilnému konštantnému riešeniu rovnice (4.1) s $\alpha = 0$, $\beta > 0$. Podobne ako v predošlom prípade vidíme, že každé ďalšie riešenie je nekonštantné periodické so striedajúcimi znamienkami. Všetky riešenia rovnice (4.1) sú ohraňované.

4.2 Rovnica (4.1) s $\beta < 0$

4.2.1 Prípád $\alpha > 0$

Uvažujme matematické kyvadlo dĺžky l , ktorého pohybová rovnica je tvaru

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (4.15)$$

Aproximujeme funkciu sinus pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa so stredom v 0 tvaru

$$T_3(\varphi) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}\varphi + \frac{g''(0)}{2!}\varphi^2 + \frac{g'''(0)}{3!}\varphi^3,$$

kde

$$g(\varphi) = \sin \varphi, \quad g(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
g'(\varphi) &= \cos \varphi, & g'(0) &= 1, \\
g''(\varphi) &= -\sin \varphi, & g''(0) &= 0, \\
g'''(\varphi) &= -\cos \varphi, & g'''(0) &= -1,
\end{aligned}$$

takže

$$T_3(\varphi) = \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3.$$

Dosadením výrazu $T_3(\varphi)$ miesto $\sin \varphi$ do pohybovej rovnice (4.15) získame diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \varphi - \frac{g}{6l} \varphi^3 = 0. \quad (4.16)$$

Rovnica (4.16) je opäť ako v kapitole 4.1 Duffingovou rovnicou (4.1), avšak teraz máme

$$\alpha = \frac{g}{l} > 0, \quad \beta = -\frac{g}{6l} < 0.$$

Rovnicu (4.1) prevedieme na konzervatívny systém

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2, \\
y_2' &= -\alpha y_1 - \beta y_1^3.
\end{aligned} \quad (4.17)$$

Vyriešme sústavu algebraických rovníc

$$\begin{aligned}
y_2 &= 0, \\
-\alpha y_1 - \beta y_1^3 &= 0,
\end{aligned}$$

ktorej riešením sú tri singulárne body. Bod $B_1 = (0, 0)$ a dvojica bodov $B_{2,3} = \left(\pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0 \right)$.

Na určenie typov singulárnych bodov využijeme vetu 3.12, v ktorej využívame hodnotu derivácie funkcie f v (3.4), ktorá je tvaru

$$f(y_1) = \alpha y_1 + \beta y_1^3,$$

odtiaľ potom

$$f'(y_1) = \alpha + 3\beta y_1^2.$$

Pre bod $B_1 = (0, 0)$ je

$$f'(0) = \alpha > 0,$$

takže sa jedná o stred.

Pre body $B_{2,3} = \left(\pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0 \right)$ platí

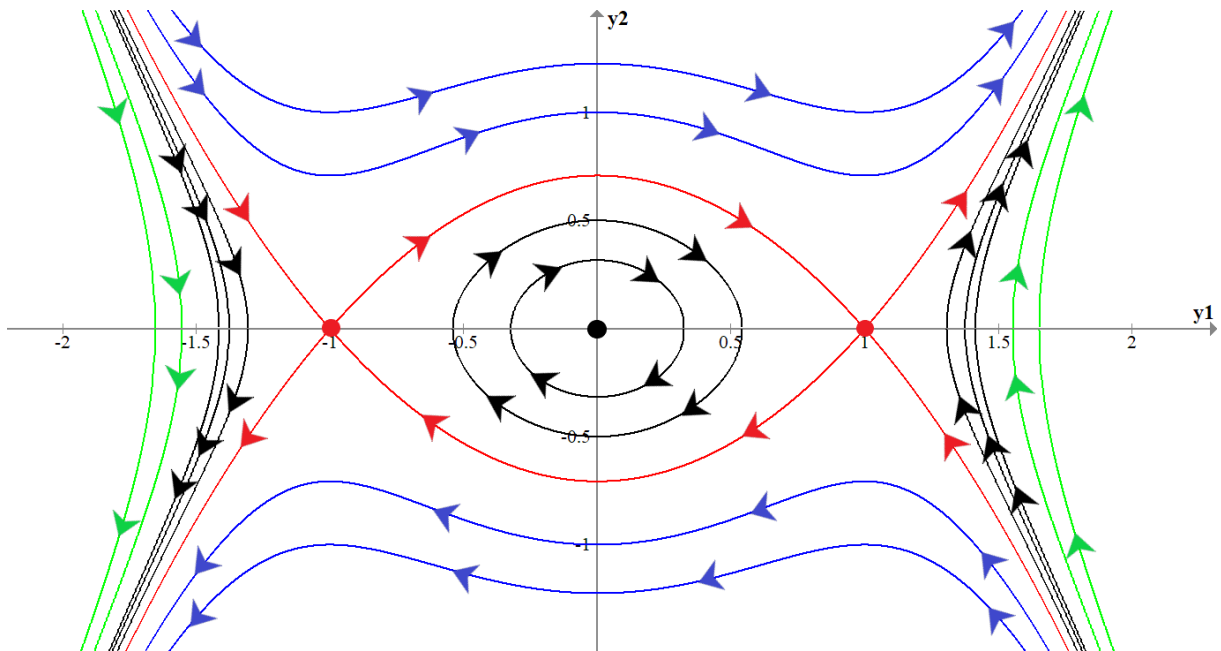
$$f' \left(\pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \right) = \alpha + 3\beta \left(\pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} \right)^2 = -2\alpha < 0,$$

preto ide o sedlá.

Pre vykreslenie fázového portréu opäť využijeme hamiltonián sústavy (4.17). Vyriešime hladiny, ktoré obsahujú singulárne body, následne hladiny, ktoré ich neobsahujú. Rovnice hladín budú tvaru

$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{4}y_1^4 = c. \quad (4.18)$$

Hladiny obsahujúce singulárne body $B_{2,3} = \left(\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0\right)$ odpovedajú riešeniu pre $c = -\frac{\alpha^2}{4\beta}$. V obr. 7 sú orbity znázornené červenou farbou. Prípád $c = 0$ odpovedá hladine obsahujúcej singulárny bod $B_1 = (0,0)$ a v obr. 7 je znázornený čiernou farbou. Pre $c \in \left(0, -\frac{\alpha^2}{4\beta}\right)$ sú odpovedajúce orbity sústavy (4.17) znázornené tiež čiernou. Pre $c > -\frac{\alpha^2}{4\beta}$ (resp. $c < 0$) má rovnica (4.18) v reálnom obore riešenie a odpovedajúce orbity sústavy (4.17) sú v obr. 7 znázornené modrou (resp. zelenou) farbou.



Obr. 7: Fázový portrét rovnice (4.1) s $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

Z fázového portréu vidíme, že rovnica (4.1) s $\alpha > 0$, $\beta < 0$ má tri konštantné riešenia odpovedajúce singulárnym bodom. Konštantné riešenie zobrazené v obr. 7 čiernou bodkou je stabilné a riešenia zobrazené červenou bodkou sú nestabilné. Orbity tvoriace cykly zobrazené v obr. 7 čiernou farbou predstavujú nekonštantné periodické riešenia striedajúce znamienko. Červenou farbou sú zakreslené heteroklinické orbity, ktoré odpovedajú riešeniam konvergujúcim pre $t \rightarrow \infty$ a $t \rightarrow -\infty$ k rôznym konštantným riešeniam.

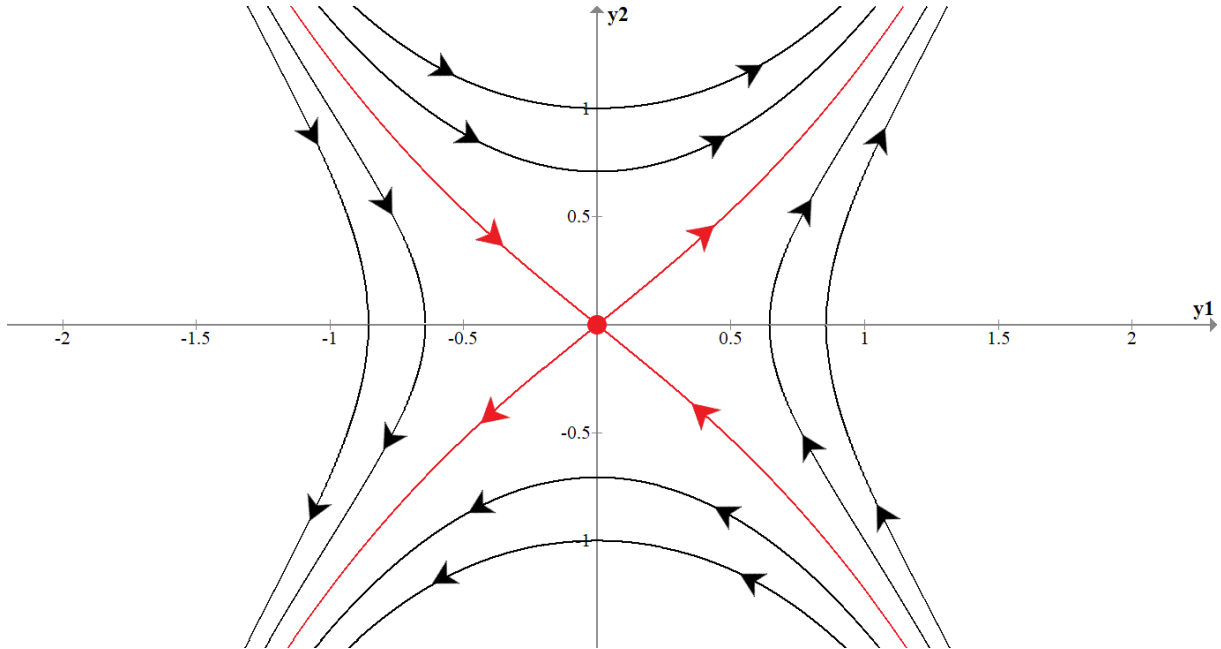
4.2.2 Prípád $\alpha < 0$

Pre úplnosť uvedieme aj prípady, kedy je $\alpha < 0$ alebo $\alpha = 0$. V tejto časti sa zaoberáme prípadom $\alpha < 0$. Podobným postupom ako v predošlých prípadoch zistíme, že riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} y_2 &= 0, \\ -\alpha y_1 - \beta y_1^3 &= 0 \end{aligned}$$

je jediný singulárny bod $B_1 = (0, 0)$. Využitím vety 3.12 určíme, že sa jedná o sedlo, ktoré je samozrejme nestabilné (viď poznámka 2.7).

Hladiny hamiltoniánu sú popísané rovnicou (4.18). Voľbou $c = 0$ získame hladinu obsahujúcu singulárny bod $B_1 = (0, 0)$. Orbitsy sú v obr. 8 zakreslené červenou farbou. Pre $c \neq 0$ má rovnica v reálnom obore riešenie a odpovedajúce orbitsy sú zakreslené v obr. 8 čiernou farbou.



Obr. 8: Fázový portrét rovnice (4.1) pre $\alpha = -1$ a $\beta = -1$

Z fázového portréту na obr. 8 vidíme, že rovnica (4.1) s $\alpha < 0$ a $\beta < 0$ má jedno konštantné nestabilné riešenie zobrazené červenou bodkou.

4.2.3 Prípád $\alpha = 0$

Sústava rovníc pre nájdenie singulárnych bodov je tvaru

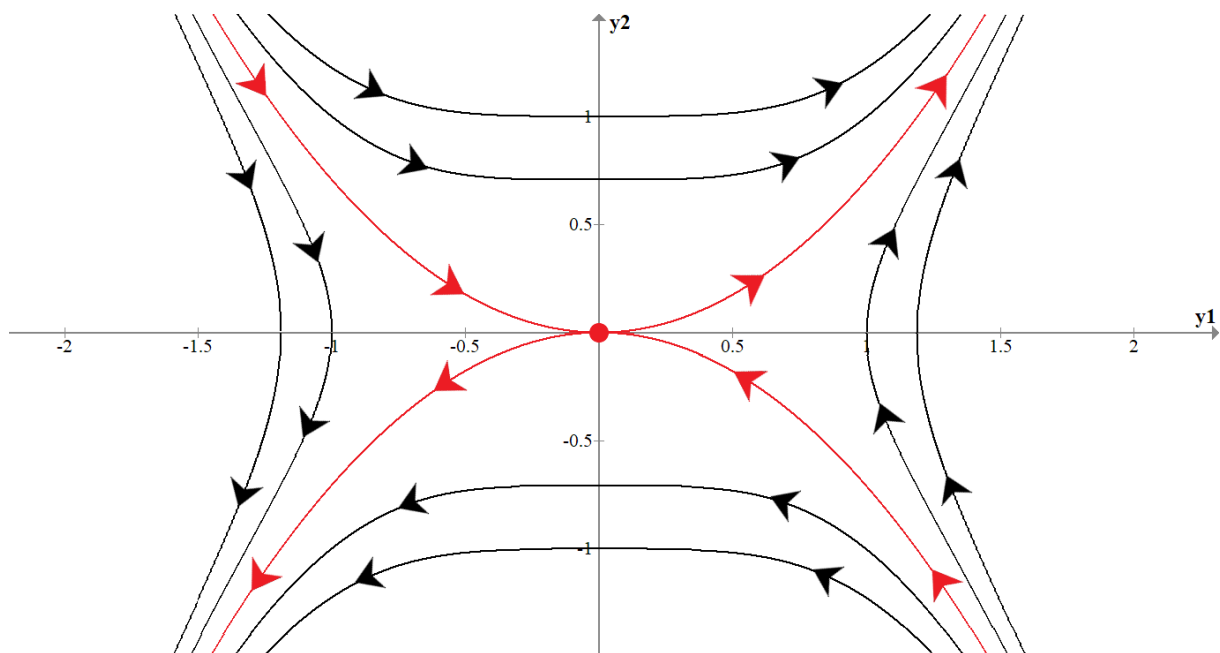
$$\begin{aligned} y_2 &= 0, \\ -\beta y_1^3 &= 0. \end{aligned}$$

Jej vyriešením získame singulárny bod $B_1 = (0, 0)$. Podobne ako v prípade $\alpha = 0$, $\beta > 0$ (viď kapitola 4.1.3), ani teraz nemôžeme z rovnakého dôvodu využiť vetu 3.12 na určenie typu singulárneho bodu. Avšak z fázového portrétu zistíme, že sa jedná o nestabilné sedlo.

Hladiny hamiltoniánu sú v tomto prípade popísané rovnicou

$$\frac{y_2^2}{2} + \frac{\beta}{4} y_1^4 = c.$$

Voľbou $c = 0$ získame hladinu obsahujúcu singulárny bod $B_1 = (0, 0)$. Orbitsy sú v obr. 9 zakreslené červenou farbou. Pre $c \neq 0$ má rovnica v reálnom obore riešenie a odpovedajúce orbitsy sú zakreslené v obr. 9 čiernou farbou.



Obr. 9: Fázový portrét rovnice (4.1) pre $\alpha = 0$ a $\beta = -1$

Podobne ako v predošlom prípade z fázového portréту na obr. 9 vidíme, že rovnica (4.1) s $\alpha = 0$ a $\beta < 0$ má jedno konštantné nestabilné riešenie zobrazené červenou bodkou.

Záver

Cieľom práce bolo zoznámiť sa so základmi problematiky sústav diferenciálnych rovníc. Ďalšími cieľmi bola interpretácia Duffingovej rovnice v súvislosti s aproximáciou kmitov nelineárnych oscilátorov a analýza singulárnych bodov tejto rovnice. Pojednávali sme o stabilite singulárnych bodov, vykreslili sme fázové portréty a interpretovali ich.

Prvá kapitola sa venuje vymedzeniu základných pojmov z teórie sústav autonómnych diferenciálnych rovníc. Boli uvedené vety a nadefinované pojmy, ktoré boli využité v praktickej časti práce.

Druhá kapitola sa obmedzuje na dvojdimenzionálne sústavy. V tejto kapitole boli uvedené niektoré typy singulárnych bodov a ich stabilita.

Tretia kapitola bola venovaná Hamiltonovým systémom. Bol definovaný pojem hamiltonián a jeho hladiny. Vďaka tomu bolo možné v praktickej časti vykreslenie fázových portrétov.

Posledná štvrtá kapitola bola venovaná analýze Duffingovej rovnice. K odvodeniu tejto rovnice poslúžili matematické modely nelineárnych oscilátorov a využitie aproximácie nelinearít pomocou Taylorovho polynómu. V práci sa rozobrali všetky možné prípady, ktoré pre Duffingovu rovnicu mohli nastať. Pre každý prípad sa určili singulárne body, rozhodlo sa o ich type a stabilite. Následne sa vykreslili fázové portréty, ktoré boli zhotovené pomocou softwaru GRAPH.

Zoznam použitých zdrojov

- [1] FRANCŮ, J. Obyčejné diferenciální rovnice. [online]. 2015 [cit. 2018-04-12]. Dostupné z: <http://www.mat.fme.vutbr.cz/Home/francu/soubory-ke-stazeni>.
- [2] KALAS, J. a M. RÁB. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1130-0.
- [3] KOVAČIĆ, I. a M. J. BRENNAN. The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour. Chichester: Wiley, 2011, xvi, 369 s. : il. ISBN 978-0-470-71549-9.
- [4] RACHŮNKOVÁ, I. a J. FIŠER. Dynamické systémy 1. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. ISBN 978-80-244-4338-6.